

Problème 1 : Quelques instruments d'optique

On étudie quelques caractéristiques d'instruments d'optique. Les lentilles seront considérées minces et utilisées dans les conditions de Gauss. On rappelle ci-après les formules de conjugaison et de grandissement transversal.

Soit une lentille mince \mathcal{L} de centre O , de foyers objet et image F et F' dont on note f' la distance focale. Si A' et A sont deux points de l'axe optique conjugués par \mathcal{L} , on a :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2.$$

Si B et B' sont deux points conjugués, hors de l'axe optique, dans les plans conjugués contenant A et A' , le grandissement transversal γ_t vérifie :

$$\gamma_t = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

I Observations à l'infini

On considère le dispositif représenté sur la figure 3 (sur une page seule à la fin de l'énoncé), utilisé pour observer des objets à l'infini. Il est constitué d'une lentille convergente \mathcal{L}_1 nommée «objectif» de distance focale notée $f'_1 > 0$ et d'une lentille divergente \mathcal{L}_2 de distance focale $f'_2 = -f'_o < 0$, nommée «oculaire». Le foyer image de l'objectif coïncide avec le foyer objet de l'oculaire. On nomme «lunette» l'ensemble de l'objectif et de l'oculaire.

Dans toute la suite, la valeur absolue de l'oculaire sera toujours f'_o , qu'il soit formé d'une lentille convergente ou divergente.

Données : Valeur absolue de la distance focale de l'oculaire $f'_o = 3\text{ cm}$.

- I.1.** (a) Tracer, sur la figure 3, la marche à travers l'objectif et l'oculaire des deux rayons parallèles représentés.
- (b) En déduire que l'image d'un objet à l'infini est elle-aussi à l'infini. Quel intérêt présente ce dispositif pour une observation en plaçant l'œil après l'oculaire ?
- I.2.** On note α' l'angle que le faisceau émergent de la lentille \mathcal{L}_2 forme avec l'axe optique.
- (a) Déterminer l'expression du quotient α'/α , nommé «grossissement» en fonction des distances focales.
- (b) On donne le diamètre angulaire apparent de la Lune $D = 0^\circ 31'$. Pour quelle valeur de la distance focale f'_1 la Lune sera-t-elle vue à travers le dispositif sous un angle de 20° .
- I.3.** On considère maintenant un dispositif formé du même objectif \mathcal{L}_1 et d'un oculaire \mathcal{L}_3 convergent de distance focale $f'_o > 0$, qu'on nomme de nouveau «lunette».

- (a) Comment placer l'objectif et l'oculaire pour que l'image d'un objet à l'infini soit de nouveau à l'infini. Comparer le grossissement (valeur absolue, signe) au cas de la figure 3. On fera un schéma du dispositif correspondant. On suppose cette condition réalisée dans toute la suite de cette question (**I.3**).
- (b) On place dans le plan orthogonal à l'axe optique et passant par F'_1 une lame de verre transparente présentant des graduations équidistantes de $\Delta y = 1\text{ mm}$. On souhaite qu'un objet observé sous un angle de $3'$ ait une largeur d'une graduation quand on l'observe avec la lunette. Quel doit être le grossissement de la lunette ?
- (c) Quel défaut vous paraît présenter ce dispositif pour des observations terrestres ?

- I.4.** On réalise le dispositif représenté à la figure 1 constitué de trois lentilles convergentes : l'objectif \mathcal{L}_1 et l'oculaire \mathcal{L}_3 précédents, et une lentille dite «de véhicule», notée \mathcal{L}_v de distance focale notée f'_v . Le foyer image F'_1 est en amont du foyer objet F_3 et la lentille de véhicule \mathcal{L}_v est située au milieu du segment $[F'_1 F_3]$.

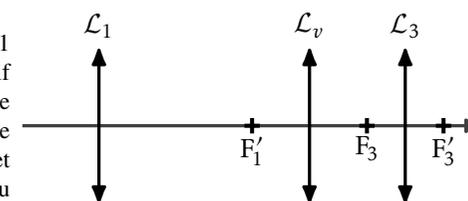


FIG. 1

- (a) Déterminer l'expression, en fonction des distances focales, de la distance $F'_1 F_3$ pour qu'un objet à l'infini ait une image à l'infini par l'ensemble des trois lentilles ? Quel est l'intérêt de ce dispositif par rapport à celui de la question **I.3** ?
- (b) Proposer un dispositif à deux lentilles de véhicule identiques possédant les mêmes propriétés que celui de la figure 1 mais pour lequel la distance entre les deux lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_3 est plus faible.

II Observations à distance finie

On utilise maintenant le montage de la figure 3 pour des observations d'objets à distance finie. Pour cela on doit légèrement déplacer l'objectif \mathcal{L}_1 le long de l'axe optique. L'image par l'ensemble des deux lentilles doit toujours être envoyée à l'infini.

- II.1.** Dans cette question, l'oculaire est de nouveau divergent, de distance focale $f'_2 = -f'_o < 0$ et on observe des oiseaux situés à une distance $D = 50\text{ m}$ en amont de l'objectif \mathcal{L}_1 .
- (a) Préciser, en le justifiant soigneusement, si on doit diminuer ou augmenter la distance $O_1 O_2$ par rapport à la configuration de la figure 3.
- (b) Les oiseaux ont une taille de 10 cm et on souhaite les voir sous un angle de $2^\circ 30'$. Déterminer quelle doit être la distance focale de l'objectif \mathcal{L}_1 et à quelle distance on doit le placer de l'oculaire \mathcal{L}_2 .

II.2. On réalise maintenant un viseur formé d'un oculaire \mathcal{L}_3 maintenant convergent, de distance focale f'_o et d'un objectif \mathcal{L}_1 convergent, de distance focale $f'_1 = 10$ cm.

- (a) Quelle doit être la distance entre l'objectif et l'oculaire pour qu'on observe nettement sans accommoder les objets situés à la distance $2f'_1$ en amont de l'objectif? On supposera cette condition réalisée dans toute la suite.
- (b) On utilise le viseur (formé des lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_3 convergentes) pour déterminer la distance focale f'_i inconnue d'une lentille divergente. On utilise pour cela le protocole suivant, illustré sur la figure 2.
 - un objet AB est placé par autocollimation au foyer objet d'une lentille \mathcal{L}_a convergente,
 - une deuxième lentille convergente \mathcal{L}_m , de distance focale f'_m est placée en aval. On note la position P_1 du viseur (dont on ne détaille plus la constitution sur les schémas) permettant de voir nette dans le viseur l'image de l'objet formé par les deux lentilles \mathcal{L}_a et \mathcal{L}_m .
 - on place ensuite la lentille divergente inconnue \mathcal{L}_i au foyer objet de \mathcal{L}_m .
 - on cherche la nouvelle position P_2 du viseur permettant de voir nette dans le viseur l'image de AB par l'ensemble des lentilles \mathcal{L}_a , \mathcal{L}_i et \mathcal{L}_m .

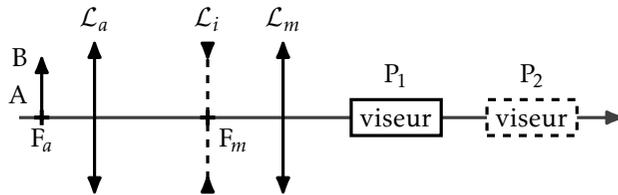


FIG. 2

On mesure $P_1P_2 = 15$ cm pour $f'_m = 10$ cm. Déterminer la valeur de f'_i .

- (c) L'œil de l'observateur peut accommoder entre l'infini et une distance nommée d_{pp} . Déterminer la zone de l'axe optique dans laquelle les objets peuvent être vus au travers du viseur selon qu'on accomode au maximum ou qu'on n'accomode pas, l'œil étant placé au niveau de la lentille \mathcal{L}_3 . Calculer sa longueur pour une valeur raisonnable de d_{pp} . Commenter et proposer une correction de ce défaut.

Exercice 1 : Voie électrifiée

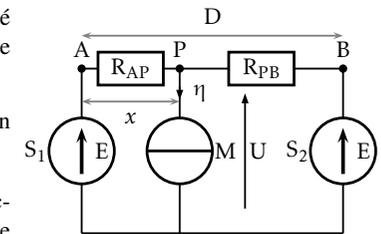
L'alimentation en énergie d'une locomotive électrique est réalisée par des stations $S_k (k \in \mathbb{N})$ branchées entre les rails et la caténaire AB . Les différentes sources seront chacune modélisées par un générateur idéal de tension de même force électromotrice E .

Le moteur M de la motrice de la locomotive est branché entre les rails et la caténaire et doit être parcouru par un courant stationnaire η : on le modélisera donc par un générateur idéal de courant.

Enfin, on négligera la résistance des rails et des câbles de liaison à la caténaire pour ne considérer que la résistance de cette dernière, caractérisée par une résistance par unité de longueur notée λ . Une longueur L de caténaire aura donc une résistance égale à $L\lambda$.

Données : résistance par unité de longueur : $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot m^{-1}$, courant électromoteur : $\eta = 800$ A.

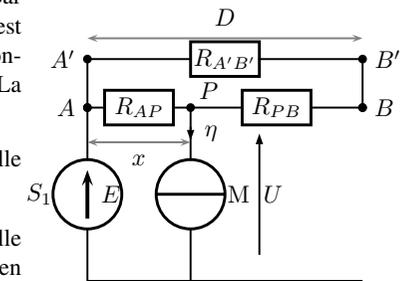
1. On considère un tronçon de ligne de longueur D alimenté par deux stations situées à chacune de ses extrémités (modélisé sur la figure ci-contre). On note x la longueur de caténaire séparant la motrice de la station S_1 .



- (a) Donner les expressions des résistances R_{AP} et R_{PB} en fonction de λ , x et D .
- (b) Exprimer la tension U aux bornes de la motrice en fonction de E , η , λ , D , et x , et en déduire l'expression de $\Delta U = E - U$, nommée chute de tension.

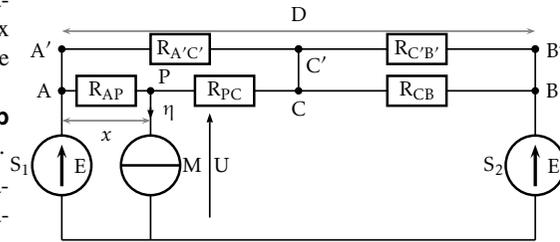
2. (a) Exprimer de même la puissance $\mathcal{P}(x)$ reçue par la motrice M et en déduire la chute $\Delta \mathcal{P} = \mathcal{P}(0) - \mathcal{P}(x)$ de la puissance reçue entre une station ($x = 0$) et une position $x \neq 0$.
- (b) Tracer l'allure de $\frac{\Delta \mathcal{P}}{\lambda D \eta^2}$ en fonction de x/D .
- (c) Calculer la distance maximale D_{max} pour laquelle $\Delta \mathcal{P}$ reste inférieure, quel que soit x , à une chute de puissance maximale $\Delta \mathcal{P}_{max} = 36,0$ kW.

3. On envisage maintenant d'alimenter le même tronçon par une seule station selon le schéma ci-contre. La caténaire est constituée de deux fils identiques AB et $A'B'$ de même longueur D et résistance linéique λ reliés aux extrémités. La motrice est branchée entre les rails et l'un des fils.



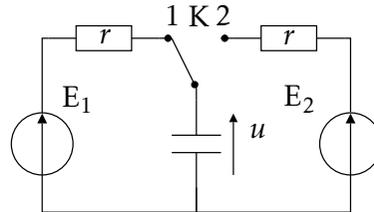
- (a) Reprendre les questions 1b et 2c dans cette nouvelle configuration.
- (b) Justifier que cette configuration est équivalente à celle du 1 pour une autre longueur D qu'on exprimera en fonction de D .

4. On revient à un système de deux stations, mais avec une caténaire à deux fils court-circuités au milieu de la ligne comme illustré sur la figure ci-contre. Reprendre à nouveau les questions 1b et 2c dans cette dernière configuration.
5. Comparer les trois configurations. Laquelle vous paraît-elle la plus avantageuse ?



Problème 2 : Simulation de résistance

Un condensateur de capacité C peut être mis en contact avec deux générateurs linéaires de force électromotrice E_i ($i = 1..2$) et de même résistance interne r par l'intermédiaire d'un commutateur K . Les forces électromotrices vérifient $E_1 > E_2$. On pose $\tau = rC$.



I Charges initiales des condensateurs

Le condensateur est initialement déchargé et l'interrupteur est basculé en position 2 à l'instant $t = 0$.

- I.1. Déterminer l'expression de la tension $u(t)$ pour $t > 0$.
- I.2. Au bout d'un temps T_0 , l'interrupteur est basculé en position 1. Déterminer l'expression ultérieure de $u(t)$.
- I.3. Tracer l'allure de $u(t)$ entre $t = 0$ et $t = \infty$ pour $E_1 = 10V$, $E_2 = 6V$, $r = 50\Omega$, $C = 20nF$, quand $T_0 = 2rC$. On y fera figurer les constantes de temps pertinentes et les valeurs remarquables de la tension u .
- I.4. Déterminer les énergies fournies par chacun des générateurs, ainsi que l'énergie dissipée par effet Joule, notée \mathcal{E}_{J12} dans les résistors pour t variant entre $t = 0$ et $t = \infty$. Simplifier cette expression dans le cas $T_0 \gg RC$ et comparer à l'énergie dissipée par effet Joule au cas d'une charge en une seule étape de $u = 0$ à $u = E_1$. Calculer la valeur de \mathcal{E}_{J12} pour les paramètres précédents, et toujours pour $T_0 \gg RC$.

II Régime périodique

Le commutateur bascule désormais périodiquement d'une position à l'autre suivant la loi suivante pour

$$n \in \mathbb{Z} : \begin{cases} K \text{ en position 1 pour } nT < t \leq (n + \frac{1}{2})T \\ K \text{ en position 2 pour } (n + \frac{1}{2})T < t \leq (n + 1)T \end{cases}$$

On suppose qu'un régime périodique (non sinusoïdal) a eu le temps de s'établir : **toutes les grandeurs électrocinétiques sont périodiques de période T** . On choisit comme origine des temps la commutation correspondant à $n = 0$.

II.1. On pose $u(0) = U_0$ et $u(T/2) = U'_0$.

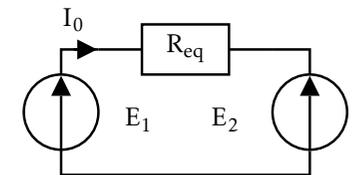
- (a) Tracer très schématiquement l'allure générale de $u(t)$ sur une période T .
- (b) Établir les expressions de $u(t)$ pour $t \in]0; T[$ à l'aide de U_0 et U'_0 .

II.2. (a) Exprimer, en régime périodique, U_0 et U'_0 en fonction de E_1 , E_2 et de la constante $a = T/(2\tau)$ dont on précisera la dimension.

- (b) En déduire l'expression de la charge Q_0 qui transite du générateur de force électromotrice E_1 vers celui de f.é.m E_2 pendant une période T .
- (c) Calculer l'intensité moyenne I_0 sur une période correspondant à ce transfert de charge.

II.3.

- (a) Quelle serait la résistance R_{eq} qui serait traversée par le même courant moyen ? On donnera son expression en fonction de r et a .
- (b) Déterminer un équivalent de R_{eq} pour $T \gg \tau$ et interpréter le résultat obtenu. **On se placera dans ce régime dans toute la suite.**
- (c) Déterminer la valeur limite $\lim_{T \ll \tau} R_{eq}$ et justifier cette valeur en décrivant le fonctionnement dans ce régime.



II.4. La commutation se fait avec une fréquence f égale à 20kHz.

- (a) Quelles valeurs des paramètres peut-on choisir pour réaliser une résistance de 1kΩ ?
- (b) Quelle condition doit vérifier la valeur de r ?
- (c) Que se passe-t-il si on change les valeurs de E_1 ou E_2 ?

III Défauts du dispositif

On considère désormais que le condensateur possède une résistance de fuite R_f branchée en parallèle.

- III.1. (a) Établir les nouvelles équations différentielles vérifiées par $u(t)$ quand le commutateur est en position 1 ou 2.
- (b) En déduire la nouvelle constante de temps qui caractérise le système ainsi que la nouvelle valeur de la résistance simulée.
- III.2. Quelle condition doit vérifier R_f pour qu'on soit dans le régime de la question II.3b ?

IV Et avec une bobine ?

On remplace le condensateur par une bobine. Déterminer le comportement du dispositif. A-t-on toujours une simulation de résistance ?

Feuille à rendre avec la copie

NOM :

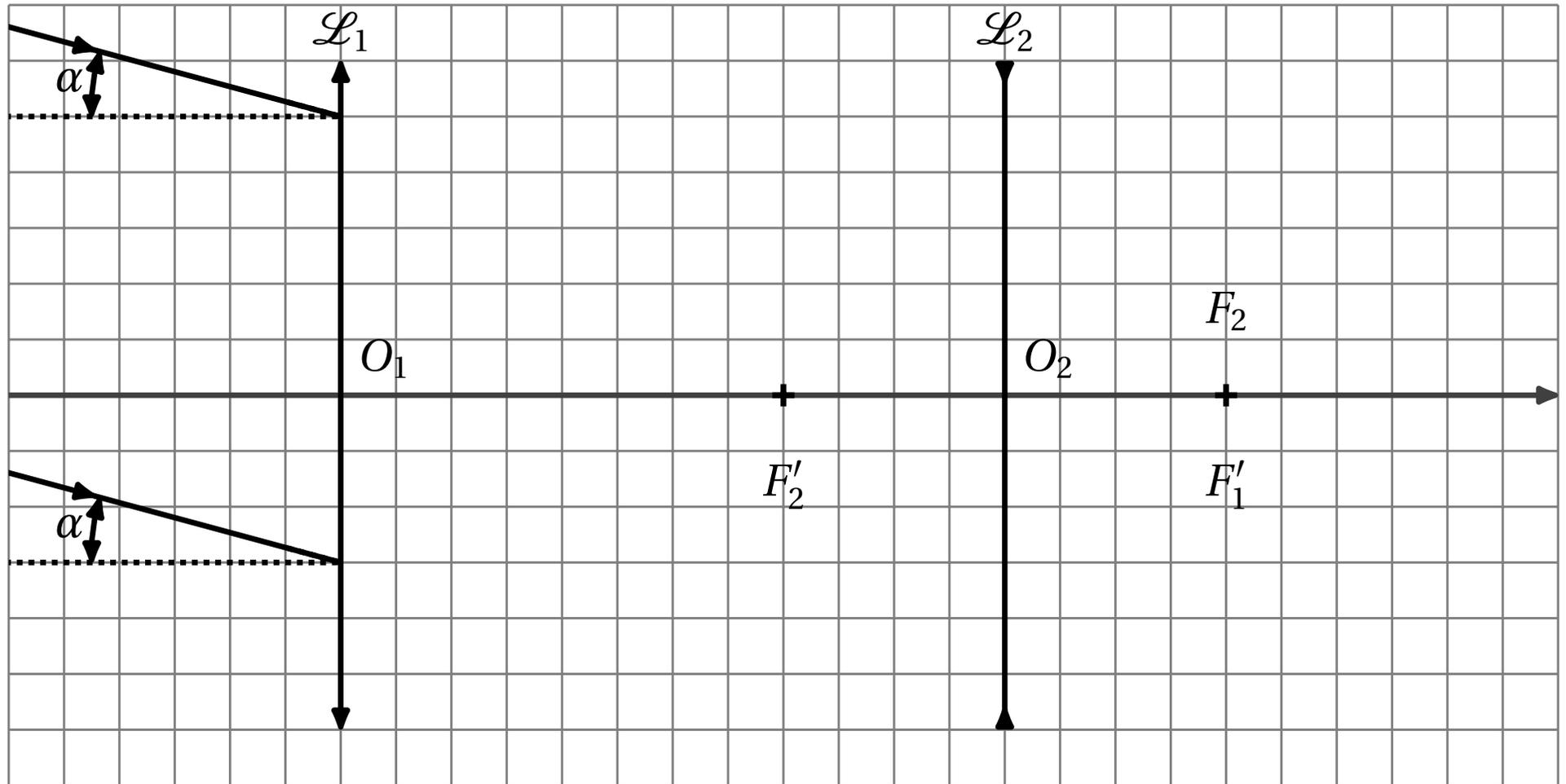


FIG. 3 : Dispositif pour une observation à l'infini du problème 1. La lentille \mathcal{L}_1 est convergente de foyer image F'_1 . La lentille \mathcal{L}_2 est divergente de foyer objet F_2 confondu avec F'_1 .

Correction du problème 1

I Observations à l'infini

I.1. (a) et (b) Comme vu dans l'exercice du TD sur la lunette de Galilée, le système proposé est afocal (voir la figure 4). En effet l'image par \mathcal{L}_1 d'un objet à l'infini est dans son plan focal image, qui coïncide avec le plan focal objet de \mathcal{L}_2 . Cette dernière en formera donc une image à l'infini.

Un œil emmétrope pourra observer un objet à l'infini sans accommoder.

I.2. (a) Le foyer image secondaire de l'objectif associé à l'angle α , noté $F'_{1\alpha}$, coïncide avec le foyer objet secondaire de l'oculaire associé à l'angle α' . On a donc, dans les conditions de Gauss où $\tan(\alpha) \approx \alpha$:

$$|\alpha'| = \left| \frac{F_2 F_{2,\alpha}}{f'_o} \right| \quad \text{et} : |\alpha| = \left| \frac{F'_1 F'_{1,\alpha}}{f'_1} \right| \rightarrow \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| = \left| \frac{f'_1}{f'_o} \right| \quad \text{soit} : \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f'_1}{f'_o},$$

puisque la figure indique de plus immédiatement que le grossissement α'/α est positif.

(b) On veut $\alpha' = 20^\circ = 3,5 \cdot 10^{-1}$ rad et on a $\alpha = 0^\circ 31' = 9,0 \cdot 10^{-3}$ rad, soit :

$$f'_1 = \frac{f'_o \alpha'}{\alpha} = 1,16 \text{ m.}$$

I.3. (a) On doit de nouveau faire coïncider le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire. En adaptant le raisonnement précédent, on vérifie que le grossissement vaut de nouveau f'_1/f'_o en valeur absolue mais est cette fois-ci négatif.

(b) La lame réalise un réticule, le plan image de \mathcal{L}_1 étant le plan réticulaire où se forment les images réelles d'objets à l'infini. On veut que l'image d'un objet à l'infini vu sous un angle $\alpha_0 = 3'$ ait une taille de $\Delta y = 1$ mm. On veut donc :

$$f'_1 \alpha_0 = \Delta y \rightarrow f'_1 = \frac{\Delta y}{\alpha} \quad \text{soit} : \frac{f'_1}{f'_o} = \frac{\Delta y}{\alpha_0 f'_o} = 38.$$

(c) Ce dispositif présente l'inconvénient de renverser les images.

I.4. (a) Définissons les points A et B par :

$$\infty \underset{\mathcal{L}_1}{\curvearrowright} A \underset{\mathcal{L}_v}{\curvearrowright} B \underset{\mathcal{L}_3}{\curvearrowright} \infty.$$

Le point A est le conjugué de l'infini par \mathcal{L}_1 , c'est donc nécessairement F'_1 . Le point B est le conjugué de l'infini par \mathcal{L}_3 , c'est donc nécessairement F_3 . Comme on a placé la lentille \mathcal{L}_v au milieu du segment F'_1 et F_3 sont équidistants du centre optique O_v de cette lentille et on

reconnait la configuration $2f-2f$ (on peut rapidement le vérifier avec la relation de conjugaison de Descartes par exemple), la distance entre F'_1 et F_3 doit être $4f'_v$, soit :

$$F'_1 F_3 = 4f'_v.$$

La lentille \mathcal{L}_v forme une image réelle (F_3) d'un objet réel (F'_1) : le grandissement est donc négatif. On retourne donc une fois de plus l'image qui est au final redressée. Comme le grandissement en configuration $2f-2f$ vaut $+1$, la taille de l'image n'est pas changée.

(b) En utilisant deux lentilles de véhicule identiques :

- la première ayant son foyer objet en F'_1
- la deuxième ayant son foyer image en F_3 ,

on réalise la même opération (grandissement de -1) mais la distance entre les deux lentilles de véhicule est quelconque. La distance $F'_1 F_3$ minimale est ici $2f'_v$ réalisée quand on accole les deux lentilles de véhicule. On peut remarquer qu'on réalise ainsi une lentille de vergence double, soit de distance focale $f'/2$ en configuration $2f-2f$.

II Observations à distance finie

II.1. (a) L'image, par l'objectif \mathcal{L}_1 , d'un oiseau à distance finie se formera en aval de F'_1 . Comme cette image doit de nouveau se trouver sur le foyer objet de \mathcal{L}_2 , on doit éloigner les deux lentilles.

(b) Notons A la position de l'oiseau. Son image A'_1 par l'objectif doit de nouveau être en F_2 . On a :

$$A \underset{\mathcal{L}_1}{\curvearrowright} A'_1 = F_2 \underset{\mathcal{L}_2}{\curvearrowright} \infty$$

Posons $\alpha_0 = 2^\circ 30'$. L'image intermédiaire étant sur le foyer objet de \mathcal{L}_2 , elle doit avoir une taille de $|f'_2| \alpha_0 = f'_o \alpha_0$. Posons H la taille de l'oiseau ; le grandissement γ_t par la lentille \mathcal{L}_1 s'exprime alors :

$$|\gamma_t| = \frac{f'_o \alpha_0}{H}.$$

La relation du grandissement de Newton pour la lentille \mathcal{L}_1 donne alors :

$$|\gamma_t| = \frac{f'_1}{|F_1 A|} \rightarrow \frac{f'_o \alpha_0}{H} = \frac{f'_1}{D - f'_1}.$$

On peut résoudre analytiquement cette équation mais on peut plus facilement faire l'hypothèse $f'_1 \ll D$, qui permet de la simplifier en :

$$\frac{f'_o \alpha_0}{H} \approx \frac{f'_1}{D} \rightarrow f'_1 \approx \frac{D f'_o \alpha_0}{H} = 0,66 \text{ m.}$$

On vérifie qu'on a bien $f'_1 \ll D$ comme supposé.

On aura intérêt utiliser un oculaire plus convergent pour diminuer f'_0 et donc f'_1 .

On détermine la distance $O_1 F_2$ avec la relation de grandissement de Descartes pour la lentille \mathcal{L}_1 :

$$\frac{\overline{O_1 F_2}}{\overline{O_1 A}} = \gamma_t \rightarrow \frac{\overline{O_1 F_2}}{-D} = -\frac{f'_0 \alpha_0}{H} \rightarrow \overline{O_1 F_2} = \frac{D f'_0 \alpha_0}{H} = 0,66 \text{ m}$$

On retrouve numériquement le résultat précédent : puisque l'objet est pratiquement à l'infini, son image par \mathcal{L}_1 est très proche du foyer image de \mathcal{L}_1 . Ici l'expression est cependant exacte sans aucune approximation.

On détermine enfin :

$$\overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 F_2} + \overline{F_2 O_2} = O_1 F_2 - f'_0 \approx O_1 F_2 \approx f'_1 = 0,63 \text{ m}.$$

- II.2. (a)** On veut de nouveau une image finale à l'infini, l'image de A_1 par \mathcal{L}_1 doit donc être le foyer objet de \mathcal{L}_3 :

$$A \underset{\mathcal{L}_1}{\curvearrowright} F_3 \underset{\mathcal{L}_3}{\curvearrowright} \infty.$$

On peut reconnaître de nouveau la configuration $2f - 2f$ pour l'objectif \mathcal{L}_1 ; on a donc :

$$\overline{O_1 F_3} = 2f'_1 \rightarrow \overline{O_1 O_3} = \overline{O_1 F_3} + \overline{F_3 O_3} = 2f'_1 + f'_0 = 23 \text{ cm}.$$

- (b)** Il s'agit de la méthode de Badal, proposée en TP. En l'absence de la lentille divergente, on a :

$$A = F_a \underset{\mathcal{L}_a}{\curvearrowright} \infty \underset{\mathcal{L}_m}{\curvearrowright} F'_m.$$

Avec la lentille divergente, on a :

$$A = F_a \underset{\mathcal{L}_a}{\curvearrowright} \infty \underset{\mathcal{L}_i}{\curvearrowright} F'_i \underset{\mathcal{L}_m}{\curvearrowright} A'.$$

La relation de conjugaison de Newton s'écrit, pour \mathcal{L}_m :

$$\overline{F_m F'^i} \cdot \overline{F'_m A'} = -f'_m{}^2.$$

La lentille \mathcal{L}_i étant placée au foyer objet de la lentille \mathcal{L}_m , on a $\overline{F_m F'^i} = f'_i$; et la mesure algébrique $\overline{F'_m A'}$ est justement la translation du viseur entre les deux pointés. On conclut donc :

$$|f'_i| = \frac{f'_m{}^2}{P_1 P_2} = 6,67 \text{ cm}.$$

- (c)** Un objet vu net sans accommodation doit se trouver à $2f'_1$ en amont de la lentille \mathcal{L}_1 . En revanche si l'œil accomode au maximum, l'image doit se trouver à la distance d_{pp} en amont de l'œil qu'on place au niveau de l'oculaire \mathcal{L}_3 . En notant A l'objet observé, A'_1 son image par \mathcal{L}_1 et A'_3 son image par \mathcal{L}_3 , on a :

$$A \underset{\mathcal{L}_1}{\curvearrowright} A'_1 \underset{\mathcal{L}_3}{\curvearrowright} A'_3.$$

Les relations de conjugaison de Descartes s'écrivent :

$$\frac{1}{\overline{O_1 A'_1}} - \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{f'_1} \quad \frac{1}{\overline{O_3 A'_3}} - \frac{1}{\overline{O_3 A'_1}} = \frac{1}{f'_3}.$$

On doit avoir $\overline{O_3 A'_3} = -d_{pp}$, soit, pour une valeur raisonnable $d_{pp} = 25 \text{ cm}$:

$$\overline{O_3 A'_1} = \frac{-f'_3 d_{pp}}{f'_3 + d_{pp}} = -2,68 \text{ cm}.$$

On a donc :

$$\overline{O_1 A'_1} = \overline{O_1 O_3} + \overline{O_3 A'_1} = 20,32 \text{ cm},$$

et la relation de Descartes pour l'objectif donne :

$$\overline{O_1 A} = \frac{f'_1 \overline{O_1 A'_1}}{f'_1 - \overline{O_1 A'_1}} = -19,7 \text{ cm}.$$

La plage d'accommodation s'étendra donc, dans ce cas, entre $2f'_1 = 20 \text{ cm}$ et $19,7 \text{ cm}$ en amont du viseur. L'instrument a alors une précision de 3 mm . En plaçant un réticule dans le plan focal objet de l'oculaire et en cherchant à voir nettes les images « en même temps que le réticule » on empêchera l'œil d'accomoder et on améliorera grandement la précision du dispositif.

Correction de l'exercice 1

- 1. (a)** On a immédiatement $R_{AP} = \lambda x$ et $R_{PB} = \lambda(D - x)$.

Par équivalences Thévenin/Norton, les générateurs idéaux de tension et les résistances

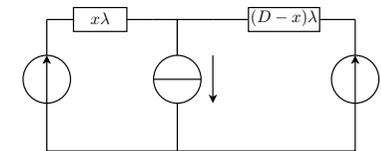
- (b)** sont équivalents à un générateur de Thévenin :

$$\begin{array}{l} \text{f.e.m.} \quad E \\ \text{résistance} \quad R_{eq} = \frac{\lambda x(D-x)}{D} \end{array}.$$

La tension aux bornes de la source idéale de courant est donc $U = E - R_{eq}\eta$, soit :

$$\Delta U = \eta R_{eq} = \lambda \eta x \frac{D-x}{D}.$$

Remarque : Puisque les points A et B sont au même potentiel, on remarque que le circuit initial est équivalent à une seule source idéale de tension, en série avec la source idéale de courant et l'association parallèle de λx et $\lambda(D-x)$.



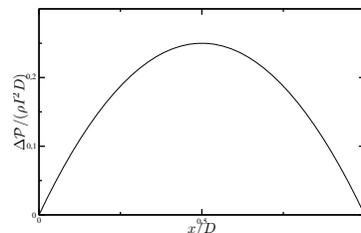
2. (a) En convention récepteur, la puissance reçue par la motrice est $\mathcal{P} = U\eta$, soit :

$$\mathcal{P}(x) = E\eta - R_{eq}\eta^2 \quad \text{en particulier : } \mathcal{P}(0) = E\eta$$

$$\text{soit : } \Delta\mathcal{P} = \eta\Delta U = \lambda\eta^2 D \left(1 - \frac{x}{D}\right) \frac{x}{D}.$$

- (b) La parabole $\Delta\mathcal{P}/(\lambda D\eta^2)$ en fonction de x/D est représentée sur la figure ci-contre. Son maximum, égal à $1/4$ est atteint en $x = D/2$.
- (c) On aura $\Delta\mathcal{P} \leq \Delta\mathcal{P}_{\max} = \lambda D\eta^2/4$ pour :

$$D \leq D_{\max} = \frac{4\Delta\mathcal{P}_{\max}}{\lambda\eta^2} = 4,5\text{ km.}$$



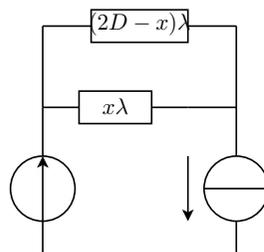
3. (a) On reconnaît un générateur de Thévenin :

f.e.m. E
résistance $\frac{\lambda x(2D-x)}{2D}$. On en déduit :

$$\Delta U = \lambda\eta x \frac{2D-x}{2D} \quad \text{et : } \Delta\mathcal{P} = \lambda\eta\Delta U = \lambda\eta^2 2D \left(1 - \frac{x}{2D}\right) \frac{x}{2D}$$

Le maximum est maintenant atteint pour $x/(2D) = \frac{1}{2}$, soit $x = D$, où il vaut $\lambda\eta^2 D/2$. Il faut donc :

$$D \leq D_{\max} = \frac{2\Delta\mathcal{P}_{\max}}{\lambda\eta^2} = 2,25\text{ km.}$$



- (b) Ce circuit est équivalent au premier pour longueur totale $D' = 2D$ doublée, puisque les points A, B, A' et B' sont au même potentiel.

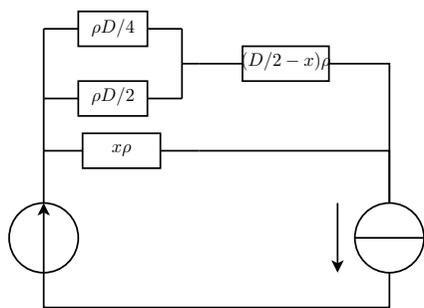
4. En utilisant l'équivalence précédente, ce dernier circuit est équivalent au schéma ci-contre. On établit un générateur de Thévenin :

f.e.m. E
résistance $\lambda x / \lambda(2D/3 - x) \rightarrow \frac{\lambda x(2D-x)}{2D}$.

On en déduit :

$$\Delta U = \frac{3D\lambda\eta x}{2D} (2D/3 - x) \quad \text{et : } \Delta\mathcal{P} = \frac{2D\lambda\eta^2}{3} y(1-y),$$

avec $y = \frac{x}{2D/3}$.



Comme précédemment, le maximum de $\Delta\mathcal{P}$ sera atteint pour $y = 1/2$, soit $x = D/3$ et vaudra $\lambda\eta^2 D/6$. Il faut donc finalement :

$$D \leq D_{\max} = \frac{6\Delta\mathcal{P}_{\max}}{\lambda\eta^2} = 6,75\text{ km.}$$

5. Pour les circuits 1 et 2, le nombre de stations par km est le même mais le dispositif est deux fois plus coûteux en fils de caténaire. Le troisième dispositif permet, lui d'utiliser moins de stations par km, d'où une économie certaine.

Correction du problème 2

I Charge initiale des condensateurs

- I.1. La continuité de la tension aux bornes du condensateur assure que $u(t=0) = 0$. La loi des mailles dans le circuit 2 s'écrit :

$$u + rC \frac{du}{dt} = E_2 \rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = \frac{E_2}{RC}.$$

On identifie $\tau = rC$ et $E_2 = u_{\infty}$. L'unique solution vérifiant la condition initiale $u_0 = 0$ est :

$$u = E_2 \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

En particulier, son expression en $t = T_0$ est :

$$u = E_2 \left(1 - e^{-T_0/\tau}\right).$$

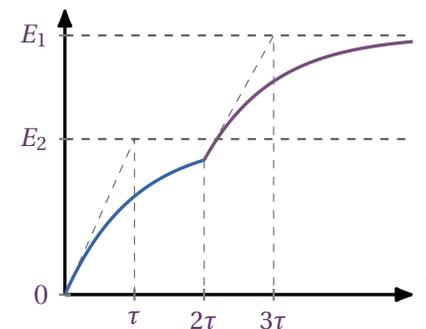
- I.2. Pour $t > T_0$, l'équation différentielle devient, en écrivant la loi des mailles dans le circuit 1 :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = \frac{E_1}{RC}.$$

La continuité de la tension aux bornes du condensateur assure que à $t = T_0$, $u = E_2(1 - e^{-T_0/\tau})$. L'unique solution vérifiant cette condition initiale est donc :

$$u = E_1 + \left[E_2 \left(1 - e^{-T_0/\tau}\right) - E_1\right] e^{-(t-T_0)/\tau}.$$

- I.3. On calcule $\tau = RC = 1,0\mu\text{s}$. L'évolution de $u(t)$ est représentée sur la figure ci-contre.



- I.4. On peut tout d'abord calculer la variation d'énergie électrostatique du condensateur \mathcal{E}_e à l'issue de la charge complète. On a :

$$\Delta\mathcal{E}_e = \left[\frac{Cu_c}{2} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{CE_1^2}{2}.$$

Sur chacun des intervalles de temps, la puissance fournie par les générateurs s'écrit $E_{1,2}i_{1,2}$, avec $i = C \frac{du}{dt}$. L'énergie que chacun fournit est donc :

$$\mathcal{E}_{E_2} = \int_{t=0}^{T_0} E_2 C \frac{du}{dt} dt = CE_2 (u(T_0) - u(0)) = CE_2 u(T_0)$$

$$\mathcal{E}_{E_1} = \int_{t=T_0}^{\infty} E_1 C \frac{du}{dt} dt = CE_1 (u(\infty) - u(T_0)) = CE_1 (E_1 - u(T_0)).$$

Avec $u(T_0) = E_2(1 - e^{-T_0/\tau})$, l'énergie totale fournie par les générateurs est, quand $T_0 \gg \tau$:

$$\mathcal{E}_{E,tot} = C \left(E_1^2 - E_2(E_1 - E_2) \left(1 - e^{-T_0/\tau} \right) \right) = C \left(E_1^2 - E_2(E_1 - E_2) \right).$$

L'énergie dissipée par effet Joule, notée \mathcal{E}_J est alors, comme établi en cours dans le cas d'un dipôle RC série, la différence :

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_{E,tot} - \Delta\mathcal{E}_e = C \left(\frac{E_1^2}{2} - E_2(E_1 - E_2) \right) = 5,2 \cdot 10^{-7} \text{ J}.$$

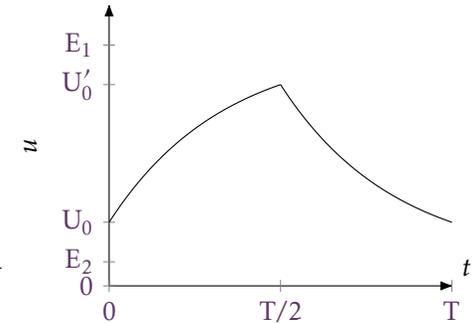
On calcule l'énergie pour une charge en une seule étape en prenant $E_2 = 0$ dans cette expression. L'énergie dissipée est alors :

$$\mathcal{E}_J = \frac{CE_1^2}{2} = 1,0 \mu\text{J}.$$

On constate que la charge en deux étapes dissipe moins d'énergie par effet Joule. En effet, le condensateur est ainsi moins loin de son état asymptotique donc le courant délivré est plus faible alors que la constante de temps reste la même.

II Régime périodique

- II.1. (a) Pour avoir un régime périodique, la tension u doit croître puis décroître sur chaque demi-période. On en déduit l'allure ci-contre (tracée pour $a = 1,5$).



- (b) Les résultats de la section précédente donnent immédiatement :

$$t \in [0, T/2] : u(t) = E_1 + (U_0 - E_1)e^{-t/\tau}$$

$$t \in [T/2, T] : u(t) = E_2 + (U'_0 - E_2)e^{-(t-T/2)/\tau}$$

$$= E_2 + (U'_0 - E_2)e^{-t/\tau} e^{-a}$$

- II.2. (a) La continuité de la charge du condensateur assure :

$$\begin{cases} t \in]0; T/2] : u(t) = E_1 + (U_0 - E_1)e^{-t/\tau} \\ t \in [T/2; T] : u(t) = E_2 + (U'_0 - E_2)e^{-(t-T/2)/\tau} = E_2 + (U'_0 - E_2)e^{-t/\tau} e^a. \end{cases}$$

La périodicité supposée du régime assure que $u(T) = u(0) = U_0$, les deux tensions vérifient donc :

$$\begin{cases} u(T/2) = U'_0 = E_1 + (U_0 - E_1)e^{-a} \\ u(T) = U_0 = E_2 + (U'_0 - E_2)e^{-a}. \end{cases}$$

On effectue la somme et la différence de ces deux équations :

$$(U_0 + U'_0)(1 - e^{-a}) = (E_1 + E_2)(1 - e^{-a}) \quad (U'_0 - U_0)(1 + e^{-a}) = (E_1 - E_2)(1 - e^{-a})$$

$$U_0 + U'_0 = E_1 + E_2 \quad U'_0 - U_0 = (E_1 - E_2) \frac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}}$$

$$U'_0 = \frac{E_1 + E_2 e^{-a}}{1 + e^{-a}} \quad U_0 = \frac{E_2 + E_1 e^{-a}}{1 + e^{-a}} \quad (1)$$

$$< E_1 \quad > E_2.$$

- (b) De 0 à $T/2$, la charge du condensateur varie de $\Delta Q = Q_0 = CU'_0 - CU_0 > 0$. Pendant la deuxième demi-période, elle varie de $-Q_0$. Au bout d'une période, il est revenu à sa charge initiale et la charge Q_0 a transité du générateur E_1 vers le générateur E_2 .

- (c) À ce transfert de charge correspond une intensité moyenne :

$$I_0 = \frac{Q_0}{T} = \frac{C(U'_0 - U_0)}{T} = \frac{C(E_1 - E_2)}{T} \frac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}} > 0$$

$$= \frac{E_1 - E_2}{2ra} \tanh \frac{a}{2}.$$

II.3. (a) On en déduit immédiatement :

$$R_{eq} = \frac{E_1 - E_2}{I_0} = 2ra \coth \frac{a}{2}.$$

(b) Pour $T \gg \tau$, on a $a \gg 1$ et donc $\tanh \frac{a}{2} \simeq 1$: $R_{eq} = 2ra = T/C$. Le condensateur a le temps de se charger complètement (à E_1) et de se décharger complètement (à E_2), la charge transférée est donc :

$$Q_0 = C(E_1 - E_2), \text{ transférée en } T \text{ soit } I_0 = C \frac{E_1 - E_2}{T}.$$

Cette intensité étant inversement proportionnelle à T , la résistance est, elle, proportionnelle à T .

(c) Pour $T \ll \tau$, on a $a \ll 1$. Comme alors $\tanh a \simeq a$, on obtient $R_{eq} \simeq 4r$. En effet, la tension aux bornes du condensateur est pratiquement stationnaire dans ce régime puisqu'il n'a quasiment pas le temps de se charger ou de se décharger. On a de plus $U_0 \simeq U'_0 \simeq (E_1 + E_2)/2$. Les courants de charge et de décharge sont également pratiquement stationnaires, égaux à leur valeur initiale de charge ou décharge $i_c = (U'_0 - E_2)/r = i_d = (E_1 - U_0)/r = (E_2 - E_1)/(2r)$. On a donc :

$$Q_0 = i_c T/2 = i_d T/2 = I_0 T \rightarrow I_0 = i_c/2 = \frac{E_1 - E_2}{4r} \rightarrow R_{eq} = 4r.$$

II.4. (a) Dans le régime choisi, on a $R_{eq} = T/C = 1/(fC)$. Pour avoir $R_{eq} = 1\text{k}\Omega$, il suffit de choisir : $C = 50\text{nF}$.

(b) On doit rester dans le régime où $T \gg \tau$, soit $r \ll R$.

(c) Les valeurs de E_1 et E_2 n'influent pas sur le fonctionnement du système. Le dispositif de capacité commutée, un tripôle formé de la capacité et du commutateur trois voies est d'ailleurs vendu comme tel et s'adapte dans n'importe quel circuit pour réaliser une résistance variable entre deux dipôles quelconques, pas nécessairement des générateurs de tension. Il suffit de régler la fréquence de commutation par une horloge électronique pour changer la valeur de la résistance.

III Défauts du dispositif

- III.1. (a) Considérons le cas où le commutateur est en position 1. Des transformations Thévenin-Norton et associations de résistors aboutissent à un générateur de Thévenin de force électromotrice $E_1 R_f / (R_f + r)$ et de résistance interne $R_f r / (R_f + r)$. Le problème est donc formellement analogue au cas sans R_f mais en remplaçant r par $r_f = R_f r / (R_f + r)$ et E_i par $D_{if} = E_i R_f / (R_f + r)$.
- (b) La nouvelle constante de temps est donc $r_f C$, on note $a_f = T / (2r_f C)$. On détermine comme précédemment le courant moyen notés I_{0f} et la résistance équivalente $R_{eqf} = (E_1 - E_2) / I_{0f}$

égaux à :

$$I_{0f} = \frac{C(E_{1f} - E_{2f})}{T} \tanh(a_f/2) = \frac{C(E_1 - E_2)}{T} \frac{R_f}{R_f + r} \tanh(a_f/2)$$

$$\rightarrow R_{eqf} = \frac{T}{C} \frac{R_f}{R_f + r} \coth(a_f/2).$$

III.2. On sera dans le régime $a_f \gg 1$ pour $T \gg r_f C$. Comme $r_f = r / (1 + R_f/r) < r$, la prise en compte de la résistance R_f ne fait pas sortir du régime de la question II.3b. En revanche, dans ce régime, la valeur de la résistance simulée est inférieure du fait de R_f . On a en effet :

$$R_{eqf} = R_{eq} \frac{R_f}{R_f + r}.$$

IV Et avec une bobine ?

La grandeur continue est cette fois-ci l'intensité du courant i_L traversant la bobine, la constante de temps est L/r et les valeurs asymptotiques, qu'on obtient en remplaçant la bobine par un interrupteur ouvert, sont E_1/r et E_2/r . La courbe d'évolution de i_L est donc celle représentée ci-contre.

On peut alors calculer le courant moyen circulant d'un générateur à l'autre. Notons pour cela i_r le courant circulant dans l'un des résistors r (de E_1 vers E_2) et u_L la tension aux bornes de la bobine.

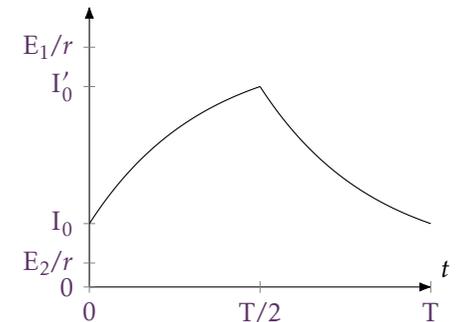
- Pour $t \in [0; T/2]$, la loi des mailles s'écrit $E_1 = r i_r(t) + u_L(t)$,
- Pour $t \in [0; T/2]$, elle s'écrit $E_2 = -r i_r(t) + u_L(t)$,

On calcule la valeur moyenne de i_r selon :

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i_r(t) dt = \frac{E_1}{2r} - \frac{E_2}{2r} + \frac{1}{rT} \left(- \int_0^{T/2} u_L(t) dt + \int_{T/2}^T u_L(t) dt \right)$$

Or :

$$\int_0^{T/2} u_L(t) dt = L \int_0^{T/2} \frac{di_L(t)}{dt} dt = L(i_L(T/2) - i_L(0)) \quad \text{et, de même :} \quad \int_{T/2}^T u_L(t) dt = L(i_L(T) - i_L(T/2)).$$



En adaptant les expressions de l'équation 1 (il suffit d'y remplacer E_i par E_i/r et de prendre $\tau_L = L/r$ puis $\tau_L = T/(2\tau_L)$). On obtient alors, après calculs ;

$$I_0 = \frac{E_1 - E_2}{2r} \left(1 + 2 \frac{a_L}{2}\right) \rightarrow R_{\text{eq}} = \frac{2r}{1 + 2 \tanh \frac{a_L}{2}}$$

Les deux cas limites sont désormais :

- pour $a_L \gg 1$ ie $Tr/(2L) \gg 1$, on a $\tanh(a_L/2) \simeq 1$ et donc $R_{\text{eq}} \simeq 2r/3$.
- pour $a_L \ll 1$, on a $\tanh(a_L/2) \ll 1$ et $R_{\text{eq}} \simeq 2r$.

Contrairement au cas du condensateur commuté, on a ici une résistance équivalente qui ne dépend pratiquement pas des caractéristiques de la bobine ou de la fréquence de commutation mais surtout des résistances internes des sources. Le dispositif n'est pas utilisable comme résistance variable.

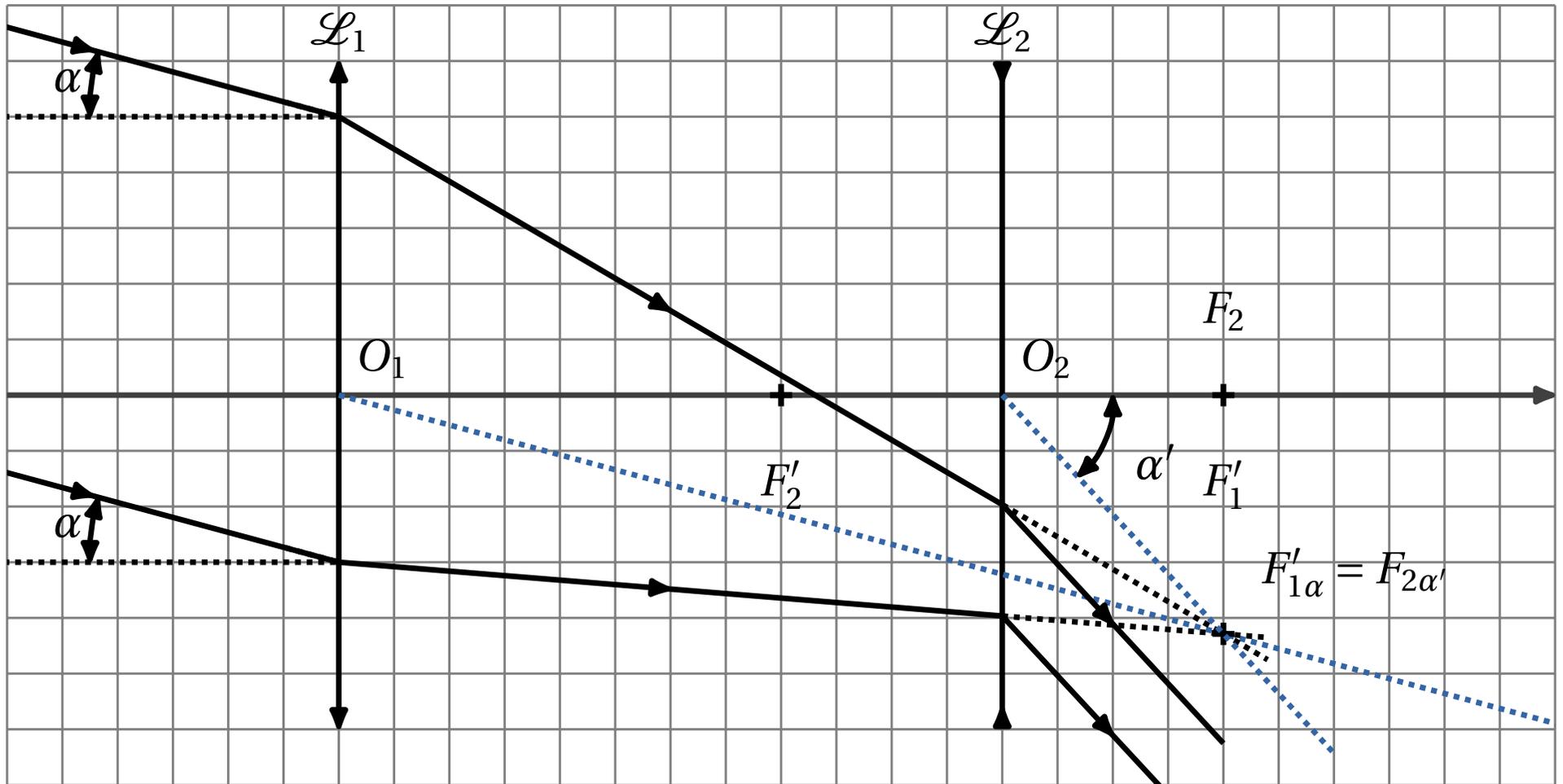


FIG. 4 : Dispositif pour une observation à l'infini du problème 1. La lentille \mathcal{L}_1 est convergente de foyer image F'_1 . La lentille \mathcal{L}_2 est divergente de foyer objet F_2 confondu avec F'_1 .